§ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Динамические уравнения Эйлера вращения тела вокруг неподвижной точки под действием сил получают из теоремы об изменении кинетического момента. Согласно этой теореме,

$$\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t=\bar{L}_O^{(e)}, \tag{10}$$

где $\bar{K}_O$ — кинетический момент тела относительно его закрепленной точки от вращения тела относительно инерциальной системы отсчета; $\bar{L}_O^{(e)}=\sum_{k=1}^{N}\bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)})$ — векторная сумма моментов внешних сил, действующих на тело (рис. 135). К числу внешних сил относится также сила реакции закрепленной точки.

Если выразить (10) в проекциях на инерциальные (неподвижные) оси координат, то через K_x, K_y, K_z в полученные уравнения, согласно (3) в общем и (4) в частном случаях главных осей, войдут изменяющиеся с течением времени моменты инерции, для вычисления которых следует уже знать движение тела, которое само подлежит определению по заданным силам. Чтобы избежать этого, Эйлер предложил проецировать векторы, входящие в (10), на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом. Для таких осей моменты инерции не зависят от времени.

Подготовим векторное уравнение (10) для проецирования на подвижные оси координат, скрепленные с движущимся телом. Для этого абсолютную производную по времени от кинетического момента необходимо выразить через относительную производную, используя формулу Бура, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t}+\bar{\omega}\times\bar{K}_O, \tag{11}$$

так как подвижная система осей координат имеет ту же угловую скорость, что и само тело, с которым скреплены эти оси.

Для удобства проецирования представим векторное произведение векторов в виде определителя с последующим разложением его по элементам первой строки, т. е.

$$\bar{\omega}\times\bar{K}_O=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ K_x & K_y & K_z\end{vmatrix}=\bar{i}(\omega_y K_z-\omega_z K_y)+$$
$$+\bar{j}(\omega_z K_x-\omega_x K_z)+\bar{k}(\omega_x K_y-\omega_y K_x), \tag{12}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат подвижной системы осей координат. Используя формулу (11), теорему об изменении кинетического момента (10) представим в форме

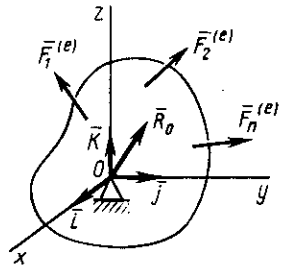

Рис. 135

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t}+\bar{\omega}\times\bar{K}_O=\bar{L}_O^{(e)}. \tag{10'}$$

В проекциях на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом, из (10′) с учетом (12) получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t}+\omega_y K_z-\omega_z K_y=L_x^{(e)};\\ &\frac{\mathrm{d}K_y}{\mathrm{d}t}+\omega_z K_x-\omega_x K_z=L_y^{(e)};\\ &\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t}+\omega_x K_y-\omega_y K_x=L_z^{(e)}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Эти уравнения после подстановки в них значений K_x, K_y, K_z из (3) приведут к обобщенным динамическим уравнениям Эйлера. Это еще довольно сложные уравнения. Дальнейшее их упрощение получается, если использовать второе предложение Эйлера — выбрать в качестве подвижных осей координат, скрепленных с телом, главные оси инерции для точки O. В этом случае K_x, K_y, K_z определяются по формулам (4). Моменты инерции по-прежнему не будут зависеть от времени и их можно выносить за знак производных по времени. Таким образом, из (13), используя (4), получим следующие динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}&J_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}+(J_z-J_y)\,\omega_y\omega_z=L_x^{(e)};\\ &J_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}+(J_x-J_z)\,\omega_z\omega_x=L_y^{(e)};\\ &J_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}+(J_y-J_x)\,\omega_x\omega_y=L_z^{(e)}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

К этим динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned}&\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi;\\ &\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi;\\ &\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

которые выражают проекции вектора угловой скорости вращения тела на подвижные оси координат, скрепленные с телом, через углы Эйлера, ψ, θ, φ и их производные по времени.